

SİNÜZOİDAL SIKLIK KESTİRİMİNDE ÖNSÜZGEÇLEMENİN CRAMER-RAO ALT SINIRLARINA ETKİSİ *

Mustafa A. Altinkaya, Bülent Sankur, Emin Anarım
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Boğaziçi Üniversitesi,
80815 Bebek İstanbul

E.posta: altink@busim.ee.boun.edu.tr, sankur@trboun.bitnet, anari@trboun.bitnet

Anahtar Sözcükler : Önsüzgeçleme, Cramer-Rao alt sınırı, sıklık kestirimi, değişinti, Fisher bilişim matrisi

Özetçe

Bu çalışmada, toplanır beyaz Gauss gürültü ortamındaki sinüzoidal ton sinyallerinin veriye uyarlanır biçimde önsüzgeçlendiğinde, sinyal parametrelerinin kestiriminin iyileştirilebileceği, Cramer-Rao alt sınırlarının (CRAS) düşürülebileceği gösterilmiştir. Tek ton sinyali ve iki ton sinyali için önsüzgeçlenmiş durumda CRAS'lar bulunmuştur. Bu iyileşmenin süzgecin merkez sıklığı gürültülü veriden kestirildiği durumlarda bile sağlanmakta olduğu görülmüştür.

1 Giriş

Toplanır beyaz Gauss gürültü ortamında kısa bir veri kaydından ton tipindeki sinyallerin parametrelerinin kestirimi problemi, sayısal sinyal işlemenin kuramında ve uygulamasında hala güncelliğini sürdürmektedir [1, 2, 3]. Birçok uygulamada ton sıklıklarının sıklık bölgesindeki yaklaşık yeri (DTMF: Dual Tone Multifrequency Receiver, çift ton çoklu sıklık almaçlarda olduğu gibi) bilinmektedir ya da bir ön-analiz ile, sözgelimi, verinin Ayrık Fourier Dönüşümü'ndeki (AFD) tepe noktalarını belirleyerek kestirilebilir [4, 5]. Bu durumlarda gürültülü sinyalin tahmin edilen ton sıklıklarının yöresinde dar bant önsüzgeçlenmesi yoluyla sıklık kestiriminin iyileşmesi beklenebilir. En genel olarak sinyal gerçel sinüzoidallerin toplamından oluşan,

$$s_n = \sum_{k=1}^L A_k \sin(\omega_k n + \theta_k) \quad (1)$$

ve toplanır beyaz Gauss gürültü ortamında gözlemlenen,

$$x_n = s_n + e_n \quad n = 1, \dots, N \quad (2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\{e_n\}$ bağımsız özdeş dağılımlı, sıfır ortalamalı ve değişintisi σ^2 olan bir gerçel Gauss raslantısal değişken dizisini, N veri örneklerinin sayısını, L ton sinyallerinin sayısını göstermektedir. Bilinmeyen parametrelerin k 'nci ton sinyali için genlik A_k , ton sıklığı ω_k ve evre açısı θ_k olduğu varsayılmıştır.

Önerilen yöntemin aşamaları şunlardır:

1. AFD'deki tepe noktalarının belirlenmesi yolu benzeri bir ön-analiz ile sinüzoidal sıklık değerlerini kabaca kestirmek.
2. Kestirilen sıklık değeri hakkındaki bilgi kullanılarak, bu sıklık ve yakınındaki sıklık bileşenlerini geçiren bir bant-geçiren süzgeç oluşturulması ve (2)'deki işaretin süzgeçlenmesi.
3. Sinyal parametrelerini kestirmek üzere süzgeçlenmiş veriyi kullanan yetenekli bir kestiricinin (modele dayalı kestiriciler gibi) kullanılması.

*Bu çalışma TÜBİTAK tarafından EEEAG-83 ve EEEAG-139 sayılı projeler kapsamında desteklenmektedir.

2 Önsüzgeçlenmiş CRAS'ların Bulunması

Bilindiği gibi parametrik bağımlılığı olmayan bir süzgeçle yapılan doğrusal bir süzgeçleme CRAS'larda herhangi bir iyileştirme yaratamaz [6]. Ancak buradaki önsüzgeçleme veriye uyarlanır olduğundan doğrusal-olmayan bir işleme karşılık düşmektedir ve dolayısıyla CRAS'larda bir iyileşme beklenebilir. Söz konusu süzgeçleme önceki bölümde ana hatlarının anlatıldığı gibi verinin analizinden spektral dorukları bulmaya, bu doruklara konumlanmış süzgeçlerle veriyi süzüp sıklığı kestirmeye, kestirilen sıklığı geri besleyerek süzgeç konumunu yeniden ayarlamaya dayanır. Bu işlemler dizisi bir evre kenetlemeli döngüyü (EKD) andırmaktadır.

Burada η 'nın bilinmeyen bir parametre vektörü ve y 'nin de parametreleri η ile gösterilen gerçel bir Gauss raslantısal değişken vektörü olduğunu kabul edelim. Eğer $\mu(\eta)$ ve $R(\eta)$ bu raslantısal vektörün beklentisini ve değişinti matrisini gösteriyorsa, Fisher bilişim matrisinin (FBM) (k,l) 'inci elemanı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$F_{k,l} = \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial R}{\partial \eta_k} R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \eta_l} R^{-1} \right] + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta_k} \right)^\dagger R^{-1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta_l} \right) \quad (3)$$

burada $(\cdot)^\dagger$ karmaşık eşlenik devriği göstermektedir. Parametre vektörü η ise beyaz Gauss gürültü ile bulaşmış tek bir sinüzoidal sinyal için şu şekilde tanımlanır.

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ A \\ \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

burada ω, A, θ sırasıyla sıklığı, genliği ve evreyi göstermektedir. Önsüzgeçleme işlemini giriş veri vektörü x üzerinde bir H matrisi ile gösterirsek, çıkış vektörü $y = Hx$ olur. Burada $x = [x_1 \cdots x_N]^T$ giriş vektörünü, $y = [y_1 \cdots y_M]^T$ önsüzgecin çıktısını, ve H ise $(N \times M)$ boyutlarındaki, η parametre vektörüne bağımlı ve $2p + 1$ uzunluğundaki bir önsüzgeç dürtü yanıtına karşılık olan evrişim matrisini göstermektedir. y 'nin beklentisi ve değişintisi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} E\{y\} &= Hs = \mu(\omega, A, \theta) \\ cov\{y\} &= \sigma^2 H H^\dagger = R(\omega, A, \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Bu tanımların kullanımıyla $F_{1,1}$

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial R}{\partial \omega} R^{-1} \frac{\partial R}{\partial \omega} R^{-1} \right] + \left(\frac{\partial Hs}{\partial \omega} \right)^\dagger R^{-1} \left(\frac{\partial Hs}{\partial \omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} tr \left[(H H^\dagger)_\omega (H H^\dagger)^{-1} (H H^\dagger)_\omega (H H^\dagger)^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} (H_\omega s + H s_\omega)^\dagger (H H^\dagger)^{-1} (H_\omega s + H s_\omega) \end{aligned} \quad (6)$$

olarak verilir. Burada $H_\omega = \frac{\partial H}{\partial \omega}$ ve $s_\omega = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ olarak tanımlanmıştır. A ve θ 'nin bilindiği durumda ω 'nın değişintisinin CRAS'ı

$$\sigma_{\omega^2} \geq \frac{1}{F_{1,1}}$$

olmaktadır. FBM'de H matrisinin ω 'ya parametrik bağımlılığı olmadığı durumlarda CRAS'ın önsüzgeçleme yapılmadığı durumdaki ifadeye dönüştüğü görülecektir:

$$\sigma_{\omega^2} = \frac{\sigma^2}{s_\omega^\dagger s_\omega} = \frac{1}{F_{1,1} \text{ eski}}$$

Herhangi bir A matrisi ve v vektörü için geçerli olan

$$v^\dagger Av \equiv tr [Avv^\dagger]$$

özdeşliği kullanılarak (6) nolu eşitlik

$$F_{1,1} = \frac{1}{2}tr \left[(HH^\dagger)_\omega (HH^\dagger)^{-1} (HH^\dagger)_\omega (HH^\dagger)^{-1} \right] + \frac{1}{\sigma^2}tr \left[(HH^\dagger)^{-1} (H_\omega s + H s_\omega)(H_\omega s + H s_\omega)^\dagger \right] \quad (7)$$

veya,

$$F_{1,1} = F_{1,1 \text{ eski}} + \frac{1}{2}tr \left[(HH^\dagger)_\omega (HH^\dagger)^{-1} (HH^\dagger)_\omega (HH^\dagger)^{-1} \right] + \frac{1}{\sigma^2} \left[tr \left(H_\omega^\dagger (HH^\dagger)^{-1} H_\omega s s^\dagger \right) + tr \left(H^\dagger (HH^\dagger)^{-1} H_\omega s s_\omega^\dagger \right) + tr \left(H_\omega^\dagger (HH^\dagger)^{-1} H s s_\omega^\dagger \right) \right] \quad (8)$$

şeklinde gösterilebilir. Önsüzgeçlemenin CRAS'ı düşürmesi için aşağıdaki şekilde tanımlanan $F_{1,1}$ için $F_{1,1 \text{ fark}}$ 'ın artı tanımlı olması gerekmektedir.

$$F_{1,1} = F_{1,1 \text{ eski}} + F_{1,1 \text{ fark}} \quad (9)$$

Dikkat edilirse CRAS ifadesinde (HH^\dagger) matrisinin evriği bulunmaktadır. Bu ifadenin evrilirliğini garantilemek için önsüzgeç matrisi H , (HH^\dagger) matrisi tam kerteli (full rank) olacak şekilde oluşturulmalıdır. H matrisinin kertesini $\min(M,N)$ ile sınırlı olduğundan, $M \leq N$ olmalıdır. Bu ise doğrusal evrişim uygulandığında en az 2p geçici rejim teriminin atılması anlamındadır. H matrisi şu şekillerde oluşturulabilir:

- $M=N-2p$ olacak şekilde doğrusal evrişim uygulanması. Bu seçim bütün geçici rejim terimlerinin atılması anlamındadır. Bu yöntemin dezavantajı atılan terimler nedeniyle bilgi kaybına yol açmasıdır.
- $M=N$ olacak şekilde doğrusal evrişim uygulanması. Bu seçim 2p geçici rejim teriminin atılması ancak diğer 2p geçici rejim teriminin saklanması anlamındadır. Uygun bir seçim doğrusal evrişimin $N+2p$ uzunluğundaki çıktısının baştan ve sondan p adet geçici rejim teriminin atılmasıdır. Bu yöntemde atılan terimlerin yol açtığı bilgi kaybı ilk yöntemle kıyasla daha azdır.
- Döner evrişim (circular convolution) uygulanması. 2p terimin örtüşmesiyle veride bozulmaya yol açmasına karşın getirdiği hesaplama kolaylığı ve bu bozulmanın yol açtığı bilgi kaybının, $M=N-2p$ olan doğrusal evrişimden daha az olabilmesi nedeniyle tercih edilebilir.

Döner evrişim uygulanınca H matrisi dolanır (circulant) olacaktır. $(N \times N)$ boyutlarındaki bu matrisin kertesini N 'dir ve bu matris bütün dolanır matrisler gibi AFD matrisi V ile aşağıdaki şekilde köşegenleştirilir:

$$H_{\text{döner}} = V^\dagger D V.$$

Burada V , $(N \times N)$ boyutlu AFD matrisidir ve şu şekilde yazılabilir:

$$V = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad W_N = e^{j(2\pi/N)}.$$

Önsüzgecin dürtü yanıtı çift bir işlev olduğundan köşegenel matris D gerçeldir. $tr(AB) \equiv tr(BA)$ ve $V^\dagger V = VV^\dagger = I$ ile D ve s 'nin her birinin gerçel olmasından dolayı $F_{1,1}$ fark şü şeklinde bulunabilir:

$$F_{1,1} = 2tr \left[D_\omega^2 D^{-2} \right] + \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 2tr \left[D_\omega D^{-1} s_\omega s^T \right] + tr \left[D_\omega^2 s s^T \right] \right\} \quad (10)$$

Daha genel durumda yani A ve θ da bilinmiyorsa F 'nin diğer elemanları da benzer şekilde bulunur [7].

2.1 İki Ton Sinyali Olduğunda FBM'nin Hesaplanması

Toplanır beyaz Gauss gürültü ile bulaşmış iki sinuzoidal ton sinyali olduğunda ve bunların A_1 ve A_2 ile θ_1 ve θ_2 olarak gösterilen genlik ve evreleri bilindiğinde parametre vektörü η şöyle tanımlanır:

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

y 'nin beklentisi ve değışintisi şu şekilde ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} E\{y\} &= Hs = \mu(\omega_1, A_1, \theta_1, \omega_2, A_2, \theta_2) \\ cov\{y\} &= \sigma^2 H H^\dagger = R(\omega_1, \omega_2) . \end{aligned} \quad (12)$$

Daha sonra (2×2) boyutlu FBM'in elemanlarından, $F_{1,1}$ ve $F_{2,2}$, (7)'deki ifadenin aynısı olarak yalnızca ω 'yı ω_1 veya ω_2 ile değıştirerek bulunur. $F_{1,2}$ aşığıdaki şekilde hesaplanırken,

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \frac{1}{2} tr \left[(H H^\dagger)_{\omega_1} (H H^\dagger)^{-1} (H H^\dagger)_{\omega_2} (H H^\dagger)^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^2} (H_{\omega_1} s + H s_{\omega_1})^\dagger (H H^\dagger)^{-1} (H_{\omega_2} s + H s_{\omega_2}) \end{aligned} \quad (13)$$

$F_{2,1}$ ise bu ifadede ω_2 ve ω_1 'in yerlerini değıştirerek bulunur. Eğer $H = H_{\text{döner}}$ ise tek ton durumundakine benzer kısaltmalar söz konusudur. $F_{1,1}$ ve $F_{2,2}$ yine (10)'daki gibi ω_1 ve ω_2 sıklık parametresi olarak bulunur. $F_{1,2}$ ve $F_{2,1}$ ise şöyle hesaplanır:

$$\begin{aligned} F_{1,2} = F_{2,1} &= 2tr \left[D_{\omega_1} D_{\omega_2} D^{-2} \right] + \frac{1}{\sigma^2} \left\{ tr \left[D^{-2} D_{\omega_2} D_{\omega_1} s s^T \right] \right. \\ &\quad \left. + tr \left[D^{-1} D_{\omega_2} s_{\omega_1} s^T \right] + tr \left[D^{-1} D_{\omega_1} s_{\omega_2} s^T \right] + tr \left[s_{\omega_2} s_{\omega_1}^T \right] \right\} . \end{aligned} \quad (14)$$

3 CRAS Sonuçları ve Yorumu

3.1 Tek Ton Durumu

CRAS'ın sıklığa bağımlılığı : Şekil 1'de İGO=0dB, örnek sayısı 30 olduğunda önsüzgeçlenmiş ve süzgeçlenmemiş verilerin CRAS'larının sıklığa bağı olarak değışimi gösterilmektedir. Önsüzgeç verinin AFD'sinin doruklarının belirlenmesiyle oluşturulmuştur. Önsüzgecin uzunluğu 29, gürültü eşdeğer bant genişliği ise 0.42 radyandır. Bu değerler için önsüzgeçlemenin tüm sıklık bandında yaklaşık olarak 2 dB dolayında CRAS'da iyileşme sağladığı görülmektedir.

CRAS'ın İGO'ya bağımlılığı : Şekil 2'de önsüzgeçlemenin bütün sıklıklarda sağladığı ortalama kazancın İGO'ya bağı olarak değışimi gösterilmiştir. Üstteki eğri önsüzgecin kusursuz önbilgi ile oluşturulduğu, alttaki ise AFD analizi ile belirlendiği durumu göstermektedir. Her iki durumda da yüksek İGO'larda benzer sonuçlar alındığı halde, düşük İGO'larda ideal olarak tasarlanmış önsüzgeçler gerçekçi olmayan çok yüksek kazançlar sağlamaktadır. Ancak pratikte geçerli olan, AFD analizi ile sağlanabilecek olan değışinti kazancının belli bir İGO'da en yüksek

değere ulaşması ve İGO düştükçe azalmasıdır. Çünkü çok düşük İGO'larda AFD benzeri bir ön-analiz ile ton sıklığının yaklaşık yerini doğru olarak belirlemek mümkün olamamaktadır.

CRAS'ın önsüzgecin bant genişliğine bağımlılığı : Şekil 3'te önceki hesaplamalardan farklı olarak önsüzgecin bant genişliği değiştiğinde AFD analizi ile oluşturulan önsüzgecin sağladığı tüm sıklık bandındaki ortalama CRAS kazancının İGO'ya bağlı olarak değişimi görülmektedir. En yüksek kazanç en dar bantlı süzgeç tarafından sağlanmaktadır, çünkü bu süzgeç en yüksek gürültü zayıflatmasına neden olmaktadır.

3.2 İki Ton Durumu

CRAS'ların sıklığa ve İGO'ya bağımlılığı : Şekil 4 ve 5 eşit genlikli iki ton sinyali olduğunda bunların CRAS'larına önsüzgeçlemenin etkisini göstermektedir. Ton sinyallerinden birinin sıklığı $\omega_1 = \pi/2$ olarak sabit tutulmuş, diğerinin sıklığının değiştiği varsayılmıştır. Bu hesaplamalarda gürültülü veri 64, önsüzgecin dürtü yanıtı ise 41 örnek uzunluğundadır. Şekil 5'te İGO=0dB iken her iki ton sıklığının CRAS'larının ton sıklığı farkı $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$ 'e göre değişimi görülmektedir. Şekil 4'te her iki tonun bütün $\Delta\omega$ değerleri için ortalama CRAS kazançlarının İGO'ya bağlı olarak değişimi gösterilmiştir. Yine önsüzgecin sıklığının tam olarak bilindiği varsayıldığından, düşük İGO'larda gerçekçi olmayan yüksek kazançlar görülmektedir. Ancak tek ton durumunda AFD doruk analiziyle oluşturulan önsüzgecin, sıklık merkezi tam ön bilgi ile seçilen önsüzgeçle yaklaşık aynı başarıyı sergilediği İGO=0dB'de, iki ton durumunda sağlanan 1dB civarındaki iyileşme önsüzgeçlemenin iki ton durumunda da yararlı olacağını kanıtlamaktadır.

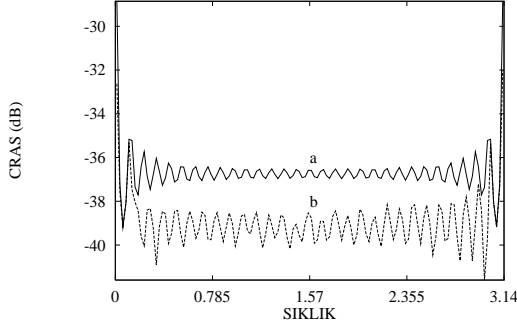
3.3 Sonuçların Yorumu

Tek ve iki ton sinyali ile yapılan hesaplamaların sonuçları şu şekilde özetlenebilir:

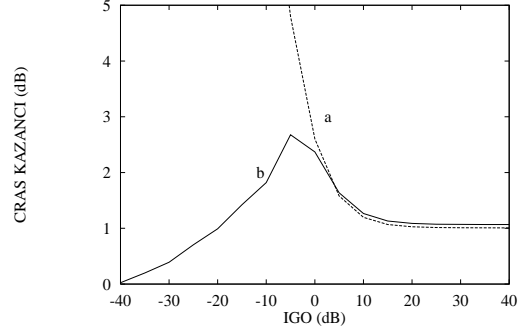
- Toplanır beyaz Gauss gürültü ortamındaki ton sinyalleri veriye uyarlanır biçimde önsüzgeçlendiğinde parametrelerin kestirimlerinin CRAS'larında iyileşme olabilmektedir.
- Bu iyileşmenin Şekil 2 ve 3'te olduğu gibi önsüzgecin verinin AFD doruk analizi ile belirlendiği durumda bile sağlanması önsüzgeçleme yönteminin geçerliliğini göstermektedir.
- Veriye uyarlanır biçimdeki önsüzgeçlemenin CRAS'ları düşürmesi sayesinde, bu yöntemin uygulanması ve uygun bir kestirici kullanılmasıyla önsüzgeçleme öncesindeki CRAS'dan daha düşük değışintisi olan bir kestirim yapılabilecektir.

Kaynakça

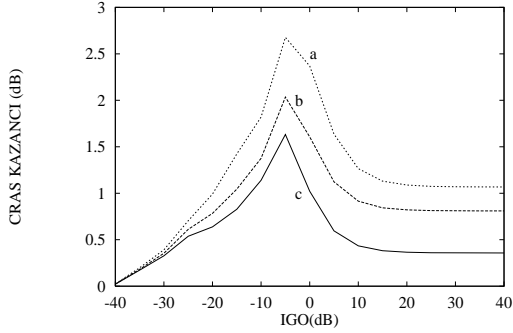
- [1] S.M. Kay, and S.L. Marple, "Spectrum Analysis: A Modern Perspective", Proc. IEEE, Vol.69, November 1981, pp. 1380-1419.
- [2] D.W.Tufts, R. Kumerasan, "Estimation Of Frequencies Of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood", Proc. IEEE, Vol. 70, September 1982, pp.975-989.
- [3] T. J. Abatzoglu, "A Fast Maximum Likelihood Algorithm For Frequency Estimation Of A Sinusoid Based On Newton's Method", IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing, Vol. 33, February 1985, pp. 77-89.
- [4] R. Kumaresan, Y. Feng, "FIR Prefiltering Improves Prony's Method", IEEE Trans. on Acoustic Speech and Signal Processing, Vol. 39, March 1991, pp. 736-741.
- [5] F. Hu, T. K. Sarkar, Y. Hua, "Utilization of Bandpass Filtering for the Matrix Pencil Method", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, January 1993, pp. 442-446.
- [6] J. D. Gorman, A. O. Hero, "Lower Bounds For Parametric Estimation with Constraints", IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 26, November 1990, pp. 1285-1301.
- [7] M. A. Altinkaya, Model Based Frequency Estimation, Ph. D Thesis, Electrical and Electronic Engineering, Boğaziçi University, 1995.



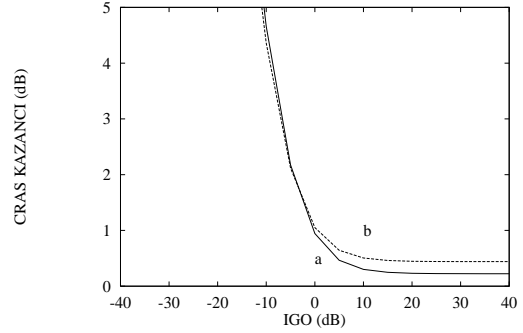
Şekil 1: Sıklık kestirimi değışintisinin Cramer-Rao alt sınırının sıklığa bağı olarak değışimi, a: önsüzgeçlemesiz, b: önsüzgeçlemeli (İGO=0dB, örnek sayısı=30, bant genişliği = 0.42rad)



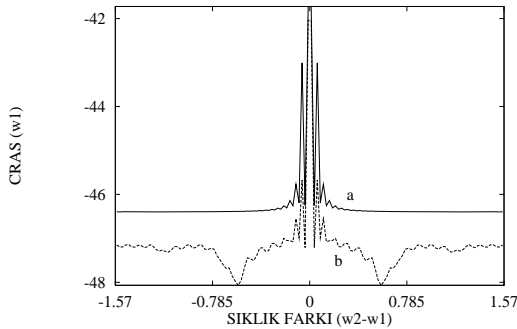
Şekil 2: Ortalama Cramer-Rao kazancının İGO'ya bağı olarak değışimi, a: kusursuz önbilgi ile belirlenen H, b: AFD ile belirlenen H (örnek sayısı=30, bant genişliği=0.42 rad)



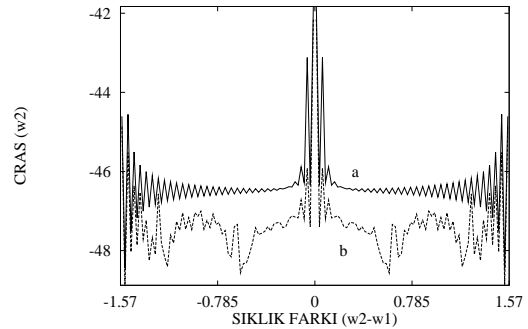
Şekil 3: Ortalama Cramer-Rao kazancının İGO'ya bağı olarak değışimi, a: bant genişliği=0.42rad, b: bant genişliği=0.46rad, c: bant genişliği= 1.06rad (örnek sayısı=30)



Şekil 4: 2 ton olduğunda ton sıklıklarının kestirim değışintilerinin ortalama Cramer-Rao kazancının İGO'ya bağı olarak değışimi, a: sıklığı sabit ton, b: sıklığı değışen ton ($\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, örnek sayısı=64, her bir bant genişliği=0.85rad)



sabit sıklıklı ton ($\omega_1 = \frac{\pi}{2}$)



sıklığı değışen ton

Şekil 5: 2 ton olduğunda ton sıklıklarının kestirim değışintilerinin Cramer-Rao alt sınırının ton sıklığı farkına bağı olarak değışimi, a: önsüzgeçlemesiz, b: önsüzgeçlemeli ($\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, İGO=0dB, örnek sayısı=64, her bir bant genişliği=0.85rad)