DÜRTÜN GÜRÜLTÜDE ALT-UZAY TEKNİKLERİYLE SİNÜZOİDAL PARAMETRE KESTİRİMİNDE YENİ SONUÇLAR

Mustafa A. Altınkaya, Hakan Deliç, Bülent Sankur

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Boğaziçi Üniversitesi,
80815, Bebek, İstanbul
E. Posta : altink, delic @busim.ee.boun.edu.tr , sankur @ boun.edu.tr

Özetçe

Dürtün ortamda gözlemlenen sinüzoidal sıklık kestiriminde Gauss gürültü varsayımına dayanan teknikler başarı sağlayamazlar. Bu durumlarda daha iyi kestirimler elde etmenin bir yolu gürültünün alfa kararlı bir süreç olarak modellenmesi ve verinin kesirli alçak kerteli istatistikleri (KAKİ) ile sinyal parametrelerinin kestirilmesidir. Bu çalışmada verinin özdeğişim (covariation) matrisinin ikinci kerteden istatistik kullanımındaki özdeğişinti matrisinin yapısı ile benzerlikler taşımasından yararlanılmıştır. Bu matrisin özanalizinin yapılması ile gürültü ve sinyal alt-uzay yöntemleri ile sinüzoidal sıklık kestirimi yapılmış ve bu yöntemlerin hangilerinin daha başarılı oldukları araştırılmıştır. Başarılı olan yöntemlerin dürtün gürültü ortamında sinüzoidal sıklık kestiriminde, ikinci kerteden istatistiğe dayalı karşılıklarından daha üstün bir başarım sergiledikleri gösterilmiştir.

1 Giriş

Sinüzoidal sıklık kestirimindeki çoğu çalışma toplanır gürültünün Gauss dağılımına sahip olduğunu varsaymaktadır. Gauss modeli teorik çalışmayı kolaylaştırıcı ve işlemsel yoğunluğu azaltıcı özellikler taşımaktadır. Gürültü dağılımı özellikle dağılımın etekleri dikkate alındığında yaklaşık olarak bir Gauss modele uydurulabiliyorsa, Gauss gürültü varsayımı ile iyi kestiriciler tasarlanabilir. Fakat gürültü Gauss-olmayan, özellikle etekleri dolu bir dağılım sınıfındaysa veya dürtün bir doğası varsa, Gauss gürültüsü varsayımına dayanan parametre kestiricileri başarısız olurlar.

Dürtün gürültü süreçleri kararlı dağılımlarla modellenebilirler. Eğer sinyal çok sayıda bağımsız ve eşdeğer dağılımların toplamı olarak düşünülebiliyorsa, bu dağılım Genelleştirilmiş Merkezi Limit Teoremi'ne göre kararlı bir dağılım olacaktır [1]. Ayrıca kararlı dağılımlar limitlerinde Gauss dağılımını da kapsamaktadırlar.

Eğer toplanır gürültü etekleri dolu bir dağılıma sahipse verinin özdeğişim (covariation [2]) katsayılarını kullanan sıklık kestiricileri Gauss gürültüsü varsayımına dayanan verinin ikinci kerteden istatistiklerini kullanan kestiricilerden daha başarılı olmaktadırlar.

Bu çalışmada özdeğişim katsayılarını kullanan alt-uzay teknikleriyle sıklık parametresi kestirimi ele alınmıştır. 2. bölümde SαK dağılımlar kısaca anlatılmıştır. 3. bölümde kesirli alçak kerteli momentlerin (KAKM) sıklık kestirimi problemine uygulanması anlatılmıştır. Benzetim sonuçları 4. bölümde incelenmektedir. Vargılar ise 5. bölümde verilmektedir.

2 SαK Dağılımlar

Simetrik α-kararlı dağılımlar (SαK) kararlı dağılımların önemli bir altsınıfını oluştururlar. SαK bir dağılımın karakteristik üsteli α, $(0 < \alpha \leq 2)$; konum parametresi δ, $(-\infty < \delta < \infty)$ ve saçılımı γ, $(\gamma > 0)$ ile gösterildiğinde SαK bir değişkenin karakteristik işlevi

$$\phi(\omega) = \exp\{j\delta\omega - \gamma|\omega|^{\alpha}\} \tag{1}$$

şeklinde verilir. Gauss gürültü varsayımında olduğu gibi genellikten uzaklaşmadan konum parametresi $\delta = 0$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda karakteristik işlev

$$\phi(\omega) = \exp\{-\gamma|\omega|^{\alpha}\} \tag{2}$$

olur. SαK dağılımların yalnızca $p < \alpha$ kertesinden momentleri tanımlıdır. Bu yüzden verinin ikinci kerteden istatistiğine dayalı kestirim yöntemleri uygulanamaz. Bir çözüm KAKM'lerin kullanılmasıdır [1]. Analizde ikinci kerteden momentler yerine özdeğişim değerleri kullanılmıştır. İki tane ortak SαK, gerçel ve saçılımları γ_x ve γ_y olan rastlantısal değişkenin özdeğişimi

$$[X,Y]_{\alpha} = \frac{E[XY^{<p-1>}]}{E[|Y|^{p}]}\gamma_y \tag{3}$$

şeklinde verilir. Burada $\gamma_y = [Y,Y]_{\alpha}$ rastlantısal değişken Y'nin saçılımıdır ve $Y^{<p-1>} = |Y|^{p-2}Y$ olarak tanımlanmıştır.

3 Sıklık Kestirimi Problemi

Sinyal gerçel sinüzoidallerin toplamından oluşmakta,

$$s_n = \sum_{k=1}^{K} A_k sin(\omega_k n + \theta_k) \tag{4}$$

ve toplanır SαK gürültü ortamında gözlemlenmektedir.

$$x_n = s_n + z_n \qquad n = 1, \cdots, N \tag{5}$$

Burada bilinmeyen parametrelerin k'ıncı ton sinyali için genlik A_k, ton sıklığı ω_k ve evre açısı θ_k olduğu varsayılmıştır. N veri örneklerinin sayısını, K ton sinyallerinin sayısını göstermektedir. x_n ve z_n ise gözlemlenen dizi X_n ve SαK gürültü dizisi Z_n'nin gerçeklenimleridir.

Gürültü örnekleri bağımsız ve özdeş dağılımlı olduklarında, gözlemlenen dizi kararlı bir özbağlanımlı (autoregressive) (ÖZ) işlev olarak modellenebilir:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \cdots + a_M X_{n-M} + b_0 Z_n. \tag{6}$$

Böylece X_{n-m} verildiğindeki genelleştirilmiş Yule-Walker eşitlikleri

$$\begin{aligned} E[X_n|X_{n-m}] &= a_1E[X_{n-1}|X_{n-m}] + \cdots \\ &\quad +a_ME[X_{n-M}|X_{n-m}], \end{aligned} \tag{7}$$

$$E[X_{n+l}|X_n] = \lambda(l)X_n \tag{8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $m = 1, \cdots, M$'dir. Eğer $\lambda(l)$, X_{n+l}'nin X_n ile özdeğişim katsayılarını gösteriyorsa, ÖB katsayıları aşağıdaki eşitlik sisteminin çözümü olarak bulunur.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda(0) & \lambda(-1) & \cdots & \lambda(1-M) \\ \lambda(1) & \lambda(0) & \cdots & \lambda(2-M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda(M-1) & \lambda(M-2) & \cdots & \lambda(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda(1) \\ \lambda(2) \\ \vdots \\ \lambda(M) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}} \tag{9}$$

Özdeğişim matrisi alfa-kararlı süreçler için, özdeğişinti (covariance) matrisinin Gauss süreçler için taşıdığına benzer bir anlam taşımaktadır. Özdeğişim matrisine özayrıştırma uygulandığında, büyük özdeğerler sinyal altuzayı özvektörlerine ait olmakta, diğer özvektörler ise gürültü altuzayını oluşturmaktadırlar. Böylece özdeğişim matrisine uygulanan bir özanaliz sonrasında uygun bir sinyal ya da gürültü altuzayı tekniği ile sinyal parametreleri kestirilebilir. Özdeğişim matrisinin bakışımlı olmadığına dikkat edilmelidir. Bu yüzden özanaliz daha zorlaşmakta ve Gauss süreçler için geliştirilmiş olan birçok altuzay parametre kestirim teknikleri alfa-kararlı süreçler için uygulanamaz olmaktadırlar.

Özdeğişim matrisini ilk kez Tsakhalides ve Nikias Çoklu Sinyal Ayrıştırması (ÇSA) (MUSIC) yönteminde kullanarak geliş yönü kestirimi problemine uygulamışlardır [3]. Daha sonra Altınkaya v.d. tarafından bu Kesirli Alçak Kerteli İstatistiğe dayalı ÇSA (KAKİ-ÇSA) olarak adlandırabileceğimiz yöntem sinüzoidal sıklıkların alfa-kararlı gürültü ortamında kestirilmesinde kullanılmıştır [4]. Aynı çalışmada bir sinyal altuzayı sıklık kestirim yöntemi olan Bartlett kestiricisinin de KAKİ'ye dayalı olanı, KAKİ-Bartlett kestiricisi ,tanıtılmıştır.

Bu çalışmada ise sinüzoidal sıklıkların alfa-kararlı gürültü ortamında kestirilmesinde KAKİ tabanlı çeşitli altuzay teknikleri tanıtılacak, sınanacak ve hangilerinin daha başarılı oldukları bulunacaktır.

4 Benzetim Çalışmaları

Bu çalışmada KAKİ-ÇSA, KAKİ-Bartlett, KAKİ Tufts Kumaresan (KAKİ-TK) ve KAKİ En Küçük Norm (KAKİ-EKN) yöntemleri ile alfa-kararlı gürültü ortamındaki gerçel sinüzoidallerin sıklıkları kestirilmiştir. Geliştirilmiş KAKM (GKAKM) (modified FLOM) kestiricisi [3] $p \in [0, 2]$ aralığındaki moment kerteleri için

$$\hat{\mathrm{C}}_{MFLOM}(k,l) = \frac{\sum_{i=1}^{N-M+1} X_{k+i-1}|X_{l+i-1}|^{p-2}X_{l+i-1}^*}{\sum_{i=1}^{N-M+1}|X_{l+i-1}|^p} \qquad k,l = 1,\cdots,M \tag{10}$$

şeklinde verilmekte ve örnek özdeğişim matrisi $\hat{\mathbf{C}}$'in (k, l)'inci elemanını bulmakta kullanılmaktadır. M, ÖB model kertesini göstermektedir. Gürültü ortamının dürtünlüğü SαK gürültünün α ve γ parametreleri ile kontrol edilmiştir. SαK gürültüyü üretmek için Tsihrintzis ve Nikias'ın açıkladığı [5] yöntem kullanılmıştır. Bu Chambers v.d. [6] tarafından anlatılan bakışımlı olmayan α-kararlı rastlantısal değişkenleri üretmekte de kullanılabilen yöntemin özel bir durumudur. Moment kertesi $p = 0.8$ ve veri uzunluğu $N = 50$ olarak seçilmiştir. Özdeğişim matrisi ise 20×20 boyutlarındadır.

4.1 Değişinti ve yanlılığın sıklığa bağımlı değişimi

Şekil 1'de Bartlett ve KAKİ-Bartlett sıklık kestiricilerinin örnek değişintisinin ve yanlılığının düzgelenmiş açısal sıklığa göre değişimi görülmektedir. $\alpha = 1$'dir (Chauchy gürültü) ve $GSGO =$ 5 dB'dir. Gürültü ve faz gerçekleşimlerinin sayısı sırasıyla 100 ve 20'dir. Yani her bir eğri 2000 Monte Carlo yürütümünün ortalamasıdır. KAKİ-Bartlett sıklık kestiricisi bu benzetimlerde Bartlett'dan 5 dB daha az bir örnek değişintisini sağlamıştır.

Yanlılık eğrisi $\omega = 1.7$rad/s çevresinde bakışımlılık göstermektedir. KAKİ-Bartlett, Bartlett sıklık kestiricisine göre çok üstün bir başarım sergilemektedir. Yanlılıklarının farkı $\omega = 0.2$rad/s yöresinde 0.4 rad/s'den fazladır.

4.2 Değişinti azalmasının GSGO'ya bağımlı değişimi

Şekil 2'de ise KAKİ-Bartlett sıklık kestiricisinin Bartlett sıklık kestiricisine kıyasla sıklık ekseninde ortalaması alınmış örnek değişintide sağladığı azalmanın GSGO'ya göre değişimi görülmektedir. Monte Carlo yürütümlerinin sayısı her biri ayrı gürültü ve faz gerçekleşimiyle olmak üzere 100'dür. En yüksek iyileşme $\alpha = 1$ iken (Chauchy gürültü) sağlanmaktadır. Bu kazanç $GSGO = 20$ dB olduğunda yaklaşık 17 dB'dir. Bütün eğriler belli GSGO değerleri arasında KAKİ kestiricilerin ikinci kerteden istatistiğe dayalı kestiricilere kıyasla büyük bir iyileşme sağladığını, diğer GSGO değerlerinde ise örnek değişintisinde pek bir kötüleşmeye yol açmadıklarını göstermektedir. Yalnızca Gauss gürültü durumunda KAKİ kestiricinin GSGO eşik değeri, ikinci kerteden istatistiğe dayalı kestiricininkinden daha yüksektir.

4.3 Değişintinin GSGO'ya bağımlı değişimi

Şekil 3'te ikinci kerteden istatistiğe dayandırıldıklarında benzer değişinti-SGO davranışı gösteren 4 adet sıklık kestiricisinin KAKİ'ye dayalı sürümlerinin değişinti-GSGO davranışı görülmektedir. $\alpha = 1$'dir. Eğriler sıklığa göre ortalaması alınmış değişintilerin GSGO'ya bağlı değişimini göstermektedir. KAKİ-TK ve KAKİ-EKN kestiricilerinde GSGO=20 dB dolaylarında ulaşılan -30 dB'lik değişinti seviyesi, GSGO'nun sınırsız olarak artması durumunda bile bu seviyesini korumaktadır. KAKİ-Bartlett ve KAKİ-ÇSA kestiricilerinin değişintileri ise GSGO arttıkça doğrusal olarak azalmaktadır.

4.4 Yanlılığın α'ya bağımlılığı

Şekil 4'te ele alınan sıklık kestiricilerinin ikinci veya kesirli alçak kerteden istatistiğe dayalı sürümlerinin $\omega = 0.76$rad/s olduğundaki yanlılıklarının alfa-kararlı gürültünün karakteristik üsteline göre değişimi görülmektedir. Bu şekil α arttıkça yanlılığın azaldığını göstermektedir.

$\alpha = 1$ iken ÇSA ve TK sıklık kestiricilerinin yanlılığı 0.4 rad/s'den fazladır. Halbuki bu değer KAKİ-TK icin 0.15 rad/s'den az ve KAKİ-ÇSA için 0.1 rad/s'den azdır. KAKİ-ÇSA'nın yanlılığı ÇSA'ninki gibi tekdüze olarak artan $\alpha = 1$ ile azalmakla birlikte, KAKİ-TK'nın yanlılığının azalması daha yavaştır ve $\alpha > 1.7$ olduğunda KAKİ-TK'nın yanlılığının TK'nınkini aştığı gözlemlenmektedir. Şekilde görülmemekle birlikte Bartlett ve KAKİ-Bartlett kestiricileri de ÇSA ve KAKİ-ÇSA kestiricileri gibi davranmaktadırlar.

5 Vargılar

Sıklık kestirimi probleminde toplanır gürültü SαK bir süreç olarak modellenebildiğinde KAKİ'ye dayalı alt-uzay teknikleri ikinci kerteden istatistiğe dayalı karşılıklarına kıyasla daha başarılı olmaktadırlar. Bu durum özellikle gürültünün dürtün karakterini gösteren alçak α değerlerinde görülmektedir. Araştırılan kestiricilerden KAKİ-ÇSA ve KAKİ-Bartlett hem dürtün gürültüde ikinci kerteden istatistiğe dayalı sürümlerinden çok daha başarılı olmakla birlikte gürültünün dürtün karakterinin olmadığı durumlarda da yaklaşık onlarla aynı başarımı elde ederek gürbüz birer kestirici olduklarını göstermişlerdir. KAKİ-TK ve KAKİ-EKN ise dürtün gürültüde TK ve EKN kestiricilerinden daha başarılı olmalarına rağmen, dürtün olmayan gürültüde onlar kadar başarılı olamamaktadırlar.

Kaynakça

[1] M. Shao and C. L. Nikias,"Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications,"*Proc. IEEE*, vol. 81,pp. 986-1010, 1993.

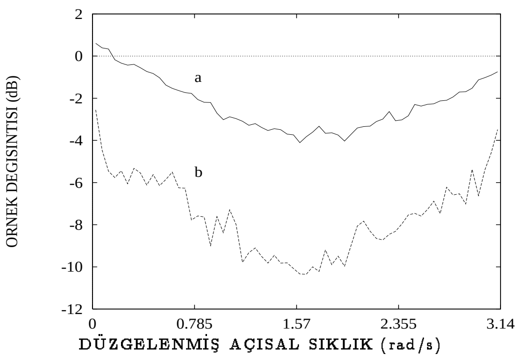
[2] G. Miller, "Properties of certain symmetric stable distribution," *J. of Multivariate Anal.*, vol. 8, pp. 346-360, 1978.

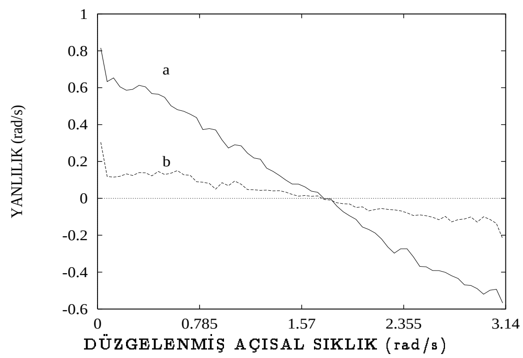
[3] P. Tsakalides and C. L. Nikias, "Subspace-based direction finding in alpha-stable noise environments," *in Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Signal Proc. (ICASSP'95)*, Michigan, U.S.A., May 8-12, 1995

[4] M. A. Altınkaya, H. Deliç, B. Sankur, E. Anarım, "Frequency Estimation of Sinusoidal Signals in Alpha-Stable Noise Using Subspace Techniques", *in Proc. 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, Korfu, Yunanistan, pp. 234-237, 24-26 Haziran 1996.

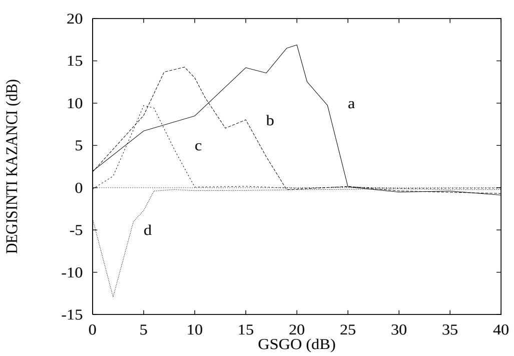
[5] G. A. Tsihrintzis, C. L. Nikias, "Performance of optimum and suboptimum receivers in the precence of impulsive noise modeled as an alpha-stable process", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, February/March/April, pp. 904-914, 1995.

[6] J. M. Chambers, C. L. Mallows and B. W. Stuck, "A Method for Simulating Stable Random Variables," *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 71, pp. 340-346, 1976.

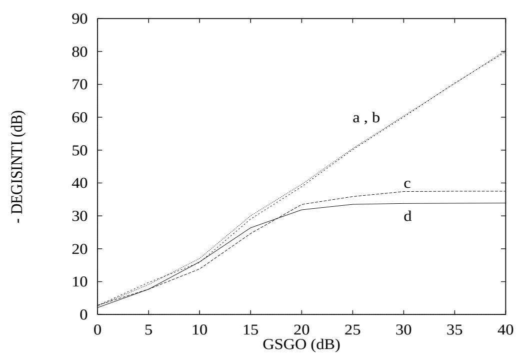




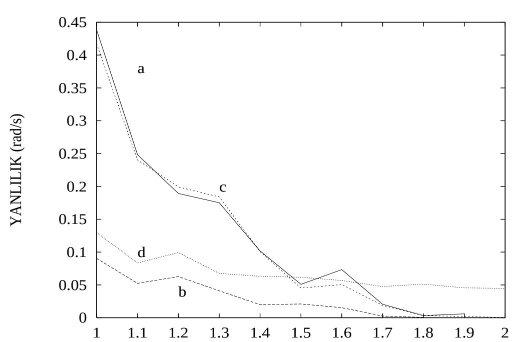
Şekil 1: Bartlett ve KAKİ-Bartlett sıklık kestiricilerinin örnek değişintisinin ve yanlılığının düzgelenmiş açısal sıklığa göre değişimi, a: Bartlett, b: KAKİ-Bartlett (FLOS-Bartlett) ($\alpha = 1.0$, $p = 0.8$ (KAKİ-Bartlett), $M = 20$, $GSGO = 5dB$, $N = 50$, 100 benzetim ortalaması)



Şekil 2: KAKİ-Bartlett sıklık kestiricisinin Bartlett'a kıyasla sıklık ekseninde ortalaması alınmış örnek değişintide sağladığı azalmanın GSGO'ya göre değişimi, a: $\alpha = 1.0$, b: $\alpha = 1.4$, c: $\alpha = 1.8$, d: $\alpha = 2.0$ ($M = 20$, $N = 50$, 100 gürültü ve faz gerçekleşimi)



Şekil 3: KAKİ'e dayalı sıklık kestiricilerinin sıklık ekseninde ortalaması alınmış örnek değişintilerinin GSGO'ya göre değişimi, a: KAKİ-Bartlett, b: KAKİ-ÇSA, c: KAKİ-TK, d:KAKİ-EKD ($M = 20$, $N = 50$, 100 gürültü ve faz gerçekleşimi)



Şekil 4: Sıklık kestiricilerinin yanlılıklarının alfa-kararlı gürütünün karakteristik üsteline göre değişimi, a: ÇSA, b: KAKİ-ÇSA, c: TK, d: KAKİ-TK ($M = 20$, $N = 50$, 100 gürültü ve faz gerçekleşimi)