

# ALFA-KARARLI GÜRÜLTÜDE ÇOKLU SINÜZOİTLERİN ALTUZAY TEKNİKLERİYLE PARAMETRE KESTİRİMİ

Mustafa A. Altinkaya \*, Bülent Sankur \*\*, Hakan Delic \*\*, Emin Anarım \*\*

\* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Gülbahçe Köyü, 35437, Urla, İzmir

\*\* Boğaziçi Üniversitesi, 80815, Bebek, İstanbul

E. Posta : altink@likya.iyte.edu.tr, { sankur, delic, anarim } @boun.edu.tr

## Özetçe

*Dürtün (impulsive) ortamda gözlemlenen sinüzoidal sıklık kestiriminde Gauss gürültü varsayımına dayanan teknikler başarı sağlayamazlar. Bu durumlarda daha iyi kestirimler elde etmenin bir yolu gürültünün alfa-kararlı bir süreç olarak modellenmesi ve verinin kesirli alçak kerteli istatistikleri (KAKİ) ile sinyal parametrelerinin kestirilmesidir. Bu çalışmada verinin özdeğişim (covariation) matrisinin ikinci kereden istatistik kullanımındaki özdeğişinti matrisinin yapısı ile benzerlikler taşımasından yararlanılmıştır. Bu matrisin özvektör analizinin yapılması ile gürültü ve sinyal altuzay yöntemleri ile çoklu ton sinyallerinin sıklık kestirimine varılmıştır. Sınanan KAKİ'ye dayalı sıklık kestirimi yöntemlerinden yüksek çözünürlük özelliği gösteren KAKİ-MUSIC'in dürtün gürültü ortamında sinüzoidal sıklık kestiriminde, ikinci kereden istatistiğe dayalı MUSIC'ten daha üstün bir başarımla sergilediği gösterilmiştir.*

## 1 Giriş

Sinüzoidal sıklık kestirimindeki çoğu çalışma toplanır gürültünün Gauss dağılımına sahip olduğunu varsaymaktadır. Gauss modeli teorik çalışmayı kolaylaştırıcı ve işlemsel yoğunluğu azaltıcı özellikler taşımaktadır. Gürültü dağılımı özellikle dağılımın etekleri dikkate alındığında yaklaşık olarak bir Gauss modele uydurulabiliyorsa, Gauss gürültü varsayımı ile iyi kestiriciler tasarlanabilir. Fakat gürültü Gauss-olmayan, özellikle etekleri dolu bir dağılım sınıfındaysa veya dürtün bir doğası varsa, Gauss gürültüsü varsayımına dayanan parametre kestiricileri başarısız olur.

Dürtün (impulsive) gürültü süreçleri kararlı dağılımlarla modellenebilir. Eğer sinyal çok sayıda bağımsız ve eşdeğer dağılımların toplamı olarak düşünülebiliyorsa, bu dağılım Genelleştirilmiş Merkezi Limit Teoremi'ne göre kararlı bir dağılım olacaktır [1]. Ayrıca kararlı dağılımlar limitlerinde Gauss dağılımını da kapsamaktadır.

Eğer toplanır gürültü etekleri dolu bir dağılıma sahipse verinin özdeğişim (covariation [2]) katsayılarını kullanan sıklık kestiricileri Gauss gürültüsü varsayımına dayanan verinin ikinci kereden istatistiklerini kullanan kestiricilerden daha başarılı olmaktadır.

Bu çalışmada özdeğişim katsayılarını kullanan altuzay teknikleriyle sıklık parametresi kestirimi ele alınmıştır. 2. bölümde  $S\alpha K$  dağılımlar kısaca anlatılmıştır. 3. bölümde kesirli alçak kerteli momentlerin (KAKM) sıklık kestirimi problemine uygulanması anlatılmıştır. Benzetim sonuçları 4. bölümde incelenmektedir. Vargılar ise 5. bölümde verilmektedir.

## 2 S $\alpha$ K Dağılımlar

Simetrik  $\alpha$ -kararlı dağılımlar (S $\alpha$ K) kararlı dağılımların önemli bir alt sınıfını oluştururlar. S $\alpha$ K bir dağılımın karakteristik üsteli  $\alpha$ , ( $0 < \alpha \leq 2$ ); konum parametresi  $\delta$ , ( $-\infty < \delta < \infty$ ) ve saçılımı  $\gamma$ , ( $\gamma > 0$ ) ile gösterildiğinde bir S $\alpha$ K değişkenin karakteristik işlevi

$$\phi(\omega) = \exp \{j\delta\omega - \gamma|\omega|^\alpha\} \quad (1)$$

şeklinde verilir. Gauss gürültü varsayımında olduğu gibi genelliği yitirmeden konum parametresi  $\delta = 0$  olarak kabul edilebilir. Bu durumda karakteristik işlev

$$\phi(\omega) = \exp \{-\gamma|\omega|^\alpha\} \quad (2)$$

olur. S $\alpha$ K dağılımların yalnızca  $p < \alpha$  kertesinden momentleri tanımlıdır. Bu yüzden verinin ikinci kereden istatistiğine dayalı kestirim yöntemleri uygulanamaz. Bir çözüm KAKM'lerin kullanılmasıdır [1]. Analizde ikinci kereden momentler yerine özdeğişim değerleri kullanılmıştır. İki tane ortak S $\alpha$ K, gerçel ve saçılımları  $\gamma_x$  ve  $\gamma_y$  olan rastlantısal değişkenin özdeğişimi

$$[X, Y]_\alpha = \frac{E[XY^{<p-1>}]}{E[|Y|^p]} \gamma_y, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (3)$$

şeklinde verilir. Burada  $\gamma_y = [Y, Y]_\alpha$  rastlantısal değişken  $Y$ 'nin saçılımıdır ve  $Y^{<p-1>} = |Y|^{p-2}Y$  olarak tanımlanmıştır.

## 3 Sıklık Kestirimi Problemi

Sinyal gerçel sinüzoidallerin toplamından oluşmakta,

$$s_n = \sum_{k=1}^K A_k \sin(\omega_k n + \theta_k) \quad (4)$$

ve toplanır S $\alpha$ K gürültü ortamında gözlemlenmektedir.

$$x_n = s_n + z_n \quad n = 1, \dots, N \quad (5)$$

Burada bilinmeyen parametrelerin  $k$ 'nci ton sinyali için genlik  $A_k$ , ton sıklığı  $\omega_k$  ve evre açısı  $\theta_k$  olduğu varsayılmıştır.  $N$  veri örneklerinin sayısını,  $K$  ton sinyallerinin sayısını göstermektedir.  $x_n$  ve  $z_n$  ise gözlemlenen dizi  $X_n$  ve S $\alpha$ K gürültü dizisi  $Z_n$ 'nin gerçeklenimleridir.

Gürültü örnekleri bağımsız ve özdeş dağılımlı olduklarında, gözlemlenen dizi kararlı bir özbağlanımlı (autoregressive) (ÖB) işlev olarak modellenebilir:

$$X_n = a_1 X_{n-1} + \dots + a_M X_{n-M} + b_0 Z_n. \quad (6)$$

Böylece  $X_{n-m}$  verildiğindeki genelleştirilmiş Yule-Walker eşitlikleri

$$E[X_n | X_{n-m}] = a_1 E[X_{n-1} | X_{n-m}] + \dots + a_M E[X_{n-M} | X_{n-m}], \quad (7)$$

$$E[X_{n+l} | X_n] = \lambda(l) X_n \quad (8)$$

şeklinde elde edilir. Burada  $m = 1, \dots, M$ 'dir. Eğer  $\lambda(l)$ ,  $X_{n+l}$ 'nin  $X_n$  ile özdeğişim katsayılarını gösteriyorsa, ÖB katsayıları aşağıdaki eşitlik sisteminin çözümü olarak bulunur.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda(0) & \lambda(-1) & \cdots & \lambda(1-M) \\ \lambda(1) & \lambda(0) & \cdots & \lambda(2-M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(M-1) & \lambda(M-2) & \cdots & \lambda(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda(1) \\ \lambda(2) \\ \vdots \\ \lambda(M) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}} \quad (9)$$

Özdeğişim matrisi alfa-kararlı süreçler için, özdeğişinti (covariance) matrisinin Gauss süreçler için taşıdığı! la na benzer bir anlam taşımaktadır. Özdeğişim matrisine özvektör ayrıştırması uygulandığında, büyük özdeğerler sinyal altuzayı özvektörlerine ait olmakta, diğer özvektörler ise gürültü altuzayını oluşturmaktadır. Böylece özdeğişim matrisine uygulanan bir analiz sonrasında uygun bir sinyal ya da gürültü altuzayı tekniği ile sinyal parametreleri kestirilebilir. Özdeğişim matrisinin bakışımı olmadığına dikkat edilmelidir. Bu yüzden analiz daha zorlaşmakta ve Gauss süreçler için geliştirilmiş olan birçok altuzay parametre kestirim tekniği alfa-kararlı süreçler için uygulanamamaktadır.

Özdeğişim matrisini ilk kez Tsakhalides ve Nikias MUSIC yönteminde kullanarak geliş yönü kestirimi problemine uygulamıştır [3]. Daha sonra Altınkaya v.d. tarafından bu Kesirli Alçak Kerteliİstatistiğe dayalı MUSIC (KAKİ-MUSIC) olarak adlandırabileceğimiz yöntem sinüzoidal sıklıkların alfa-kararlı gürültü ortamında kestirilmesinde kullanılmıştır [4]. Aynı çalışmada bir sinyal altuzayı sıklık kestirim yöntemi olan Bartlett kestiricisinin de KAKİ'ye dayalı olanı, KAKİ-Bartlett kestiricisi, tanıtılmıştır. [7]'de ise sinüzoidal sıklıkların alfa-kararlı gürültü ortamında kestirilmesinde KAKİ tabanlı Tufts Kumaresan ve En Küçük Norm (KAKİ-TK ve KAKİ-EKN) teknikleri tanıtılmış, ve KAKİ-MUSIC, KAKİ-Bartlett, KAKİ-TK ile KAKİ-EKN'nin sınaması sonucunda, KAKİ-MUSIC ve KAKİ-Bartlett'in diğerlerinden daha başarılı oldukları bulunmuştur.

Bu çalışmada alfa-kararlı gürültüde gözlemlenen çoklu sinüzoidlerin sıklıklarının KAKİ tabanlı altuzay teknikleriyle kestirimi araştırılacaktır. Yeni sıklık kestiricilerinin tanıtılmasında bu kestiricilerin önce tek bir sinüzoidin sıklık parametresi kestirimine uygulanması anlamlıdır [4, 7]. Ancak altuzay tekniklerini kullanan sıklık kestiricileri yüksek çözünürlüklerinden dolayı özellikle sıklık bölgesinde yakın konumlu sinüzoidlerin sıklık kestiriminde öne çıkmaktadır. Bu yüzden bu çalışmada çoklu sinüzoidlerin sıklıklarının alfa-kararlı gürültü ortamında kestirilmesinde KAKİ tabanlı çeşitli altuzay teknikleri sınanacak ve başarımları ikinci kereden istatistiğe dayalı kestiricilerle karşılaştırılacaktır.

## 4 Benzetim Çalışmaları

Bu çalışmada KAKİ-MUSIC, KAKİ-Bartlett, MUSIC ve Bartlett yöntemleri ile alfa-kararlı gürültü ortamındaki gerçel sinüzoidlerin sıklıkları kestirilecektir. Geliştirilmiş KAKM (GKAKM) (modified FLOM) kestiricisi [3]  $p \in [0, 2]$  aralığındaki moment kerteleri için

$$\hat{\mathbf{C}}_{MFLOM}(k, l) = \frac{\sum_{i=1}^{N-M+1} X_{k+i-1} |X_{l+i-1}|^{p-2} X_{l+i-1}^*}{\sum_{i=1}^{N-M+1} |X_{l+i-1}|^p} \quad k, l = 1, \dots, M \quad (10)$$

şeklinde verilmekte ve örneklem özdeğişim matrisi  $\hat{\mathbf{C}}$ 'in  $(k, l)$ 'inci elemanını bulmakta kullanılmaktadır.  $M$ , ÖB model kertesini göstermektedir. Gürültü ortamının dürtünlüğü  $S\alpha K$  gürültünün  $\alpha$  ve  $\gamma$  parametreleri ile kontrol edilmiştir.  $S\alpha K$  gürültüyü üretmek için Tsihrintzis ve Nikias'ın açıkladığı [5] yöntem kullanılmıştır.

Bu Chambers v.d. [6] tarafından anlatılan bakışımı olmayan  $\alpha$ -kararlı rastlantısal değişkenleri üretmekte de kullanılabilen yöntemin özel bir durumudur. Benzetimlerde ton sinyallerinin sayısı ikidir. Ton sıklıklarından birisi  $f_1 = 0.25$ 'de sabitlenmiştir. Monte Carlo yürütümlerinin her birinde ayrı gürültü ve faz gerçekleşimi uygulanmıştır. KAKİ moment kertesini  $p = 0.8$  olarak seçilmiştir. Özdeğişim matrisi ise  $20 \times 20$  boyutlarındadır.

#### 4.1 Değişinti ve yanlılığın sıklığa bağımlı değişimi

Şekil 1'de MUSIC ve KAKİ-MUSIC sıklık kestiricisiyle yapılan sıklığı değişen tonun kestirimlerinin örnek değişintisinin ve yanlılığının ton sinyallerinin düzgelenmiş sıklık farkına göre değişimi görülmektedir.  $\alpha = 1$ 'dir (Chauchy gürültü) ve  $GSGO \doteq 10 \log \left( \frac{1}{\gamma N} \sum_{n=1}^N |s_n|^2 \right)$  olarak tanımlanan genelleştirilmiş sinyal gürültü oranı 2 dB olup veri uzunluğu  $N = 1000$ 'dir. Gürültü ve faz gerçekleşimlerinin sayısı 200'dür. KAKİ-MUSIC sıklık kestiricisi bu benzetimlerde MUSIC'ten 3 dB daha az bir örnek değişintisini sağlamıştır.

Yanlılık eğrisi  $f_2 - f_1 = 0$  çevresinde bakışımllık göstermektedir. KAKİ-MUSIC, MUSIC sıklık kestiricisine göre çok üstün bir başarımlı sergilemektedir. Yanlılıklarının farkı  $f_2 - f_1 = -0.25$  yöresinde 0.2'den fazladır.

#### 4.2 Çözünürlük olasılığının GSGO'ya ve $\alpha$ 'ya bağımlı değişimi

Şekil 2'de MUSIC ve KAKİ-MUSIC sıklık kestiricilerinin çözünürlük olasılıklarının GSGO'ya bağımlı değişimi görülmektedir. Ayrık Fourier Dönüşümü (periodogram) kestiricisi ile elde edilen çözünürlük olasılığı da şekilde gösterilmiştir. Çözünürlük durumunu (event) tanımlamak için

$$\rho(f_1, f_2) \doteq P(f_m) - \frac{1}{2} \{P(f_1) + P(f_2)\} > 0$$

rastlantısal eşitsizliği kullanılmıştır [8]. Burada  $f_1$  ve  $f_2$  ton sıklıkları,  $f_m = (f_1 + f_2)/2$  ton sıklıklarının ortalaması,  $P(f)$  ise kestiricinin genlik spektrumunun tersidir. Yani ton sıklıkları  $P(f)$ 'de spektral sınırlara karşılık gelmektedirler.  $\rho$  ise karar istatistiğidir. Böylece eşitsizliğin gerçekleşmesi ton sıklıklarının çözündüğünü göstermektedir. Benzetimler sonucunda çözünürlük olasılığı  $\rho$ 'nun doğrulandığı benzetimlerin toplam benzetim sayısına bölünmesiyle bulunmaktadır. Şekil 2'deki benzetimlerde  $\alpha = 1$  ve  $N = 50$ 'dir. Burada ton sıklıklarının farkı Gauss gürültüdeki Fourier çözünürlük sınırının dört katı olmakla birlikte, AFD'nin özellikle düşük GSGO değerlerinde MUSIC ve KAKİ-MUSIC'ten daha başarısız olduğu görülmektedir. KAKİ-MUSIC'in MUSIC'e üstünlüğü ise  $GSGO = 0$  dB'de 0.08'e kadar çıkmaktadır. Şekil 3'te MUSIC ve KAKİ-MUSIC ve AFD sıklık kestiricilerinin çözünürlük olasılıklarının  $\alpha$ 'ya bağımlı değişimi görülmektedir. Bu kestiriciler arasında en başarılıları olan KAKİ-MUSIC  $\alpha = 1.5$  iken % 100 çözünürlüğe ulaşırken, bu çözünürlüğü MUSIC  $\alpha = 1.6$  iken, AFD ise ancak  $\alpha = 2$  olduğunda yakalayabilmektedir.

#### 4.3 Değişinti azalmasının GSGO'ya bağımlı değişimi

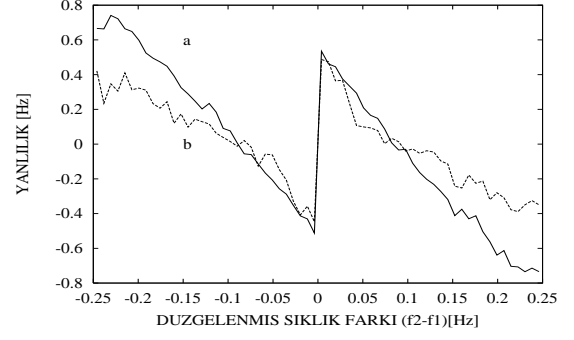
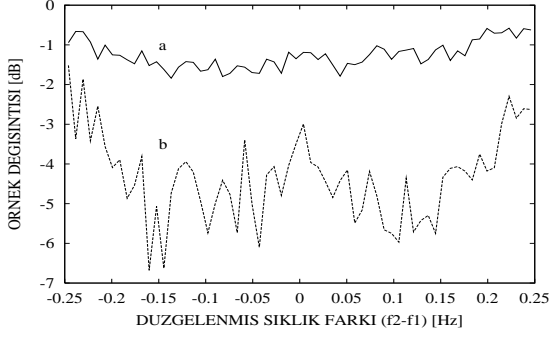
Şekil 4'de ise KAKİ-MUSIC sıklık kestiricisinin MUSIC sıklık kestiricisine kıyasla sıklık ekseninde ortalaması alınmış örnek değişintide sağladığı azalmanın GSGO'ya göre değişimi görülmektedir. Monte Carlo yürütümlerinin sayısı 1000'dir.  $\alpha = 1.1$  iken  $\alpha = 1.8$  durumuna oranla daha yüksek bir iyileşme sağlanmaktadır.

## 5 Vargular

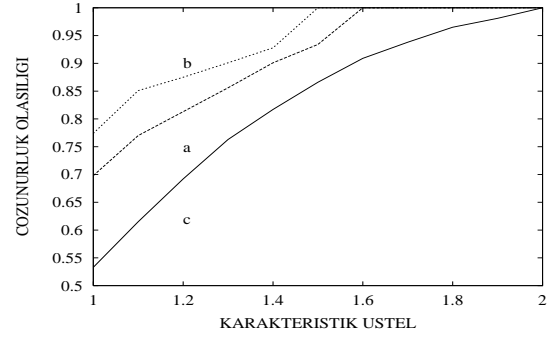
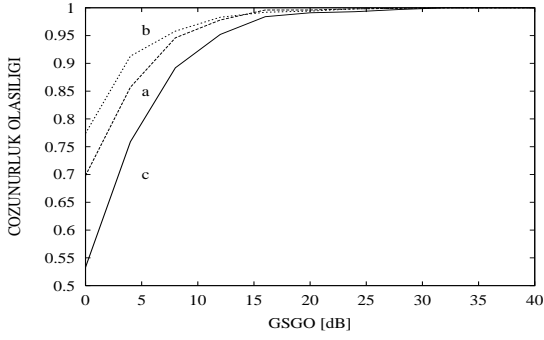
Sıklık kestirimi probleminde toplanır gürültü  $S\alpha K$  bir süreç olarak modellenenebildiğinde KAKİ'ye dayalı altuzay teknikleri birden çok ton sinyali olduğunda da tek ton sinyali olduğundaki gibi [4, 7] ikinci kereden istatistiğe dayalı karşılıklarına kıyasla daha başarılı olmaktadır. Bu durum özellikle gürültünün dürtün karakterini gösteren alçak  $\alpha$  değerlerinde daha belirgindir. Araştırılan kestiricilerden Bartlett ve KAKİ-Bartlett'ın tek ton sinyali olduğu durumdan farklı olarak ton sıklıklarını çözmekteki başarısızlıkları yüzünden birden çok sinüzoid olduğunda KAKİ kullanan kestiricileri sınamak için uygun olmadıkları görülmüştür. Bu yüzden MUSIC ve KAKİ-MUSIC ile alınan benzetim sonuçları değerlendirilmiştir. KAKİ-MUSIC çoklu sinüzoidlerin sıklıklarının kestiriminde de hem dürtün gürültüde MUSIC'ten çok daha başarılı olup hem de gürültünün dürtün karakterinin olmadığı durumlarda yaklaşık onunla aynı başarıyı elde ederek gürbüz bir kestirici olduğunu göstermiştir.

## Kaynakça

- [1] M. Shao and C. L. Nikias, "Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications," *Proc. IEEE*, vol. 81, pp. 986-1010, 1993.
- [2] G. Miller, "Properties of certain symmetric stable distribution," *J. of Multivariate Anal.*, vol. 8, pp. 346-360, 1978.
- [3] P. Tsakalides and C. L. Nikias, "Subspace-based direction finding in alpha-stable noise environments," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Signal Proc. (ICASSP'95)*, Michigan, U.S.A., May 8-12, 1995
- [4] M. A. Altinkaya, H. Deliç, B. Sankur, E. Anarım, "Frequency Estimation of Sinusoidal Signals in Alpha-Stable Noise Using Subspace Techniques", in *Proc. 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, Korfu, Yunanistan, 24-26 Haziran 1996.
- [5] G. A. Tsihrintzis, C. L. Nikias, "Performance of optimum and suboptimum receivers in the presence of impulsive noise modeled as an alpha-stable process", *IEEE Trans. on Communications*, vol. 43, no. 2/3/4, February/March/April, pp. 904-914, 1995.
- [6] J. M. Chambers, C. L. Mallows and B. W. Stuck, "A Method for Simulating Stable Random Variables," *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 71, pp. 340-346, 1976.
- [7] M. A. Altinkaya, B. Sankur, H. Deliç, E. Anarım, "Dürtün Gürültüde Alt-Uzay Teknikleriyle Sinüzoidal Parametre Kestiriminde Yeni Sonuçlar", 5. Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, Kuşadası, İzmir, pp. 438-443, 1-3 Mayıs 1997.
- [8] Q. T. Zhang, "Probability of Resolution of the MUSIC Algorithm", *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 43, no. 4, pp. 978-987, 1995.

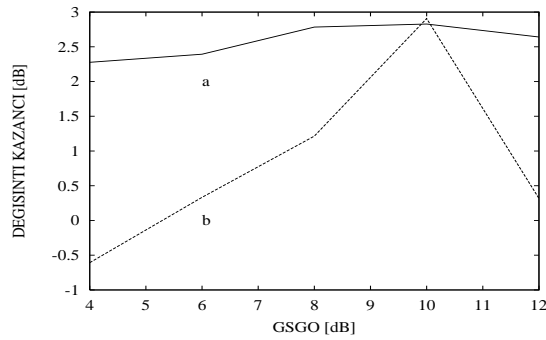


Şekil 1: MUSIC ve KAKİ-MUSIC sıklık kestiricilerinin örnek değışintisinin ve yanlılığının düzgelelenmiş sıklık farkına göre değışimi, a: MUSIC, b: KAKİ-MUSIC ( $f_1 = 0.25$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $p = 0.8$  (KAKİ-MUSIC),  $M = 20$ ,  $GSGO = 2dB$ ,  $N = 1000$ , 200 benzetim ortalaması)



Şekil 2: MUSIC, KAKİ-MUSIC, AFD sıklık kestiricilerinin çözünürlük olasılığının GSGO'ya göre değışimi, a: MUSIC, b: KAKİ-MUSIC, c: AFD ( $\alpha = 1.0$ ,  $M = 20$ ,  $N = 50$ ,  $f_2 - f_1 = 0.08$ , 1000 gürültü ve faz gerçeğleşimi)

Şekil 3: MUSIC, KAKİ-MUSIC, AFD sıklık kestiricilerinin çözünürlük olasılığının karakteristik üstele göre değışimi, a: MUSIC, b: KAKİ-MUSIC, c: AFD ( $GSGO = 2dB$ ,  $M = 20$ ,  $N = 50$ ,  $f_2 - f_1 = 0.08$ , 1000 gürültü ve faz gerçeğleşimi)



Şekil 4: KAKİ-MUSIC sıklık kestiricisinin MUSIC'e kıyasla sıklık ekseninde ortalaması alınmış örnek değışintide sağladığı azalmanın GSGO'ya göre değışimi, a:  $\alpha = 1.1$ , b:  $\alpha = 1.8$  ( $M = 20$ ,  $N = 50$ , 1000 gürültü ve faz gerçeğleşimi)